Synthèse d'images 4ETI
Exercices d'entrainements 2011 - *CPE*

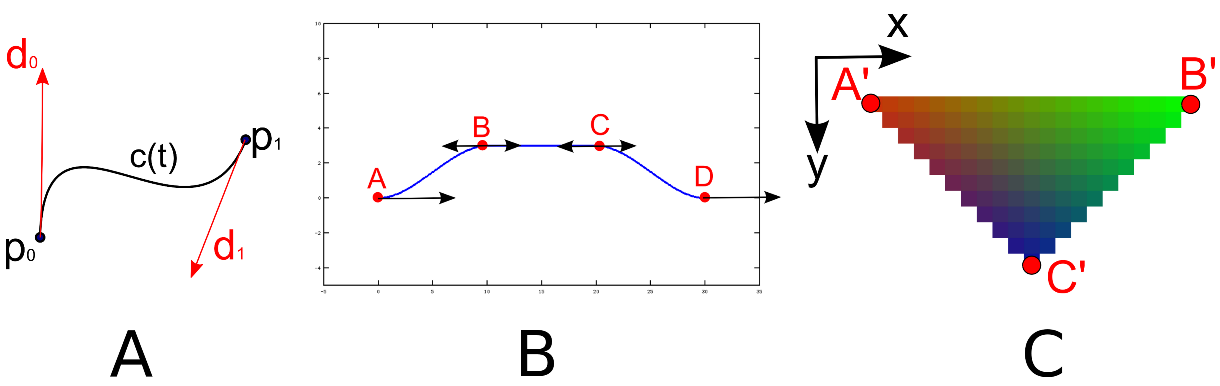

FIGURE 1 – A : Courbe de Hermite ; B : Design d'un pont passant par 4 points ; C : Image d'un triangle.

1 Modélisation de courbes

On rappelle qu'une courbe de Bézier de degré 3 peut s'écrire sous la forme

$$c(t) = \sum_{k=0}^{3} C_3^k \, t^k (1-t)^{3-k} \, A_k \text{ ,}$$

où A_k représente les sommets du polygone de contrôle de la Bézier (points de l'espace 2D ou 3D). En 2D on aura $A_k = (x_k, y_k)$ et, en 3D $A_k = (x_k, y_k, z_k)$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$.

1.1 Expression matricielle

Question 1 *Exprimer cette expression sous forme matricielle.*

On pourra écrire

$$\begin{cases} c_x(t) = \mathbf{a}_x^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \\ c_y(t) = \mathbf{a}_y^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \\ c_z(t) = \mathbf{a}_z^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

où M *est une matrice à définir,*

$$\mathbf{a}_x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \textit{ et } \; \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

1.2 Interpolation de Hermite

Une approche commode de définition de courbe consiste à fixer les 2 points extrémaux $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$, ainsi que leurs tangentes en ces points $\mathbf{d}_0$ et $\mathbf{d}_1$ (voir fig. 1(A)).

Question 2 *Exprimez la courbe cubique correspondante en fonction des paramètres* $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1)$.

On appelle ce type d'interpolation, une courbe spline de Hermite cubique.

Question 3 *Donnez le polygone de contrôle de la courbe de Bézier correspondante.*

1.3 Design d'un pont

Nous souhaitons désormais réaliser le design d'un pont. Voici le profil 2D illustré en fig. 1(B). Ce pont est constitué de 3 parties :

1. Une partie montante entre A et B.
2. Une partie plate entre B et C
3. Une partie descendante entre C et D.

La valeur des dérivées en A, B, C, et D sont identiques et valent $\mathbf{d} = (d_x, 0)$. Nous travaillerons dans l'espace 2D.

On pourra considérer $A = (0, 0)$, $B = (10, 3)$, $C = (20, 3)$, $D = (30, 0)$ et $d_x = 10$.

Question 4 *Réalisez la modélisation de ce pont en donnant la ou les courbes polynomiales interpolant les données.*

2 Rendu projectif

Soit le triangle 3D donné par les points (A, B, C) (voir fig. 1(C)). On prendra $A = (10, 10, 10)$, $B = (30, 10, 20)$ et $C = (20, 20, 30)$.

On place un écran parallèle à l'axe (x, y) de manière à visualiser un triangle 2D. La projection choisie est une projection orthogonale et les coordonnées résultantes sur l'écran (que l'on notera par le signe $'$) sont données par $A' = (10, 10)$, $B' = (30, 10)$ et $C' = (20, 20)$.

2.1 Coordonnées barycentriques

Supposons que
- A soit de couleur $c_a = (200, 50, 10)$.
- B soit de couleur $c_b = (0, 255, 0)$.
- C soit de couleur $c_c = (15, 20, 150)$.

Question 5 *Après affichage du triangle sur l'image par la méthode projective vue en cours donnez la couleur affectée au pixel* $(18, 13)$.

2.2 Z-Buffer

Supposons maintenant qu'il existe un second triangle (D, E, F) dans la scène. On prendra $D = (10, 10, 10)$, $E = (30, 10, 22)$, et $F = (25, 22, 28)$. Ce triangle est uniformément de couleur grise $c = (100, 100, 100)$. Vous affichez cette scène sur votre écran en suivant l'algorithme du Z-buffer.

Question 6 *Donnez en justifiant votre démarche la couleur finale affectée au pixel* $(17, 11)$.